

ORNAMENTGRUPPEN

von

Walther JANK, Wien

1. Einleitung

Hier handelt es sich um ein reizvolles Kapitel der Algebra bzw. der Geometrie, welches in der Kunst, der Naturwissenschaft (z.B. Kristallographie und Atomphysik) und der Technik (z.B. Fertigungs- und Verpackungstechnik) große Bedeutung besitzt und gerade in den letzten Jahrzehnten Gegenstand namhafter Forschungsbeiträge war. Viele der vorliegenden Probleme können fachlich nicht vorgebildeten Menschen klargemacht werden, doch wurden etwa die Untergruppenbeziehungen bei den Wandmustergruppen erst in den Fünfzigerjahren durch W.O.J.MOSER in einer Dissertation völlig klargestellt. Im folgenden sollen die wichtigsten Begriffe geklärt und einige Beweisideen zur Herleitung der ebenen Ornamentgruppen, die vor allem auf L.FEJES TÓTH [1] zurückgehen, vorgeführt werden. Als graphische Illustrationen für Wandmustergruppen dienen einige der 28 Typen regulärer Parkettierungen nach HEESCH-KIENZLE [2], deren meiste unabhängig von den genannten Verfassern bereits M.C.ESCHER (1898-1972) intuitiv gefunden hat.

2. Grundbegriffe

Der Schauplatz aller folgenden Betrachtungen ist die (als Punktmenge gedachte euklidische) Anschauungsebene R^2 . Ist $\mathcal{U} = \{\alpha\}$ eine Menge von globalen Abbildungen $\alpha: R^2 \rightarrow R^2$ und $T \subset R^2$, so wollen wir unter $T\mathcal{U}$ die Vereinigungsmenge $\bigcup_{\alpha} T\alpha$ aller Bildmengen $T\alpha$ ($T\alpha$ ist die Menge der Bilder der Punkte von T unter α) verstehen. Bezeichnet man (formal) eine Translation als eine (von der Identität I verschiedene) Drehung mit verschwindendem Drehwinkel, dann ist jede gleichsinnige Kongruenz der R^2 eine Drehung. Das Produkt von n Drehungen mit den Winkeln α_i ($i=1, \dots, n$) ist eine Drehung durch den Winkel $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ (Additionstheorem für Drehwinkel). Jede gegensinnige Kongruenz der R^2 ist eine Gleitspiegelung. Verschwindet deren Schiebanteil, spricht man auch

(schärfer) von einer reinen oder axialen Spiegelung. Ist \mathcal{G} die Gruppe aller Kongruenzen der R^2 , so bildet die Menge $\{g \in \mathcal{G} \mid T_g = T\} =: \Upsilon_T$ aller Kongruenzen, die eine beliebige Teilmenge $T \subset R^2$ in sich überführen, eine Gruppe, nämlich die sogenannte Symmetriegruppe Υ_T von T . Der Begriff Symmetriegruppe findet sich bereits bei F.A.MÖBIUS und J.F.C.HESSEL. T heißt asymmetrisch oder unsymmetrisch, wenn $\Upsilon_T = \{I\}$, d.h. wenn Υ_T nur aus der Identität I besteht, sonst symmetrisch.

Sei nun $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{G}$ eine beliebige Kongruenzgruppe. Die Elemente von \mathcal{Q} sind also Kongruenzen der R^2 , die Verknüpfung zweier Elemente erfolgt durch das Hintereinanderausführen der Kongruenzen. Eine Teilmenge der R^2 heißt diskret, wenn es zu jedem ihrer Punkte eine Umgebung (z.B. in Form einer offenen Kreisscheibe) gibt, die außer diesem Punkt keine weiteren Punkte der Menge enthält. Die Kongruenzgruppe \mathcal{Q} heißt diskret, wenn $P \in \mathcal{Q} \mid P \in R^2$ diskret ist, das heißt also, wenn die zugehörige Menge der Bildpunkte eines beliebigen Punktes P diskret ist. Die diskreten Kongruenzgruppen der R^2 heißen Ornamentgruppen. Sei $\mathcal{Q} \neq \{I\}$ eine nicht nur aus der Identität I bestehende Ornamentgruppe und $F \subset R^2$ eine beliebig vorgegebene Fundamentalfigur, so heißt $F\mathcal{Q}$ ein zu \mathcal{Q} gehöriges Ornament. Dabei setzen wir F bei Bedarf als offen und je zwei Bildmengen von F als disjunkt voraus. F und alle ihre Bilder sind in dem Sinne völlig gleichberechtigt, daß jede dieser kongruenten Figuren als Fundamentalfigur für dasselbe Ornament dienen könnte oder jede zu allen anderen dieselbe relative Lage hat. Eine Ornamentgruppe ist immer Untergruppe der Symmetriegruppe eines zugehörigen Ornaments. Bei Verwendung einer symmetrischen Fundamentalfigur F könnte das Ornament $F\mathcal{Q}$ unter Umständen mehr als die in \mathcal{Q} enthaltenen Kongruenzen vertragen. Ist F ein Gebiet (offen und zusammenhängend) mit dem Rand R und stellt das Ornament $F\mathcal{Q}$ abgesehen von $R\mathcal{Q}$ eine lückenlose und schlichte (nicht mehrfache) Überdeckung von R^2 dar, dann heißt $F\mathcal{Q}$ auch reguläre Pflasterung oder reguläre Parkettierung von R^2 . F und seine Bilder heißen dann Fundamentaltbereiche oder Pflastersteine. Solche Pflasterungen sind auch sowohl fertigungstechnisch - wenn etwa aus einem Blech kongruente Teile mit möglichst wenig Verschnitt ausgestanzt werden sollen - als auch verpackungstechnisch von großer Bedeutung.

Die Ornamentgruppen mit notwendig unbeschränkten Fundamentalbereichen sind die Rosetten- und Friesgruppen, die zugehörigen Ornamente heißen Rosetten bzw. Friese. Die Rosettengruppen sind die translationsfreien Ornamentgruppen und zugleich die einzigen Ornamentgruppen von endlicher Ordnung (mit endlich vielen Elementen). Enthält eine solche nur gleichsinnige Kongruenzen, so ist sie zyklisch und wird von einer Drehung um einen Punkt O durch den Winkel $2\pi/p$ ($p \in \mathbb{N}$) erzeugt (Bezeichnung \mathcal{I}_p). O heißt p -zähliges Drehzentrum oder p -Gyr. Die (allenfalls vorhandenen) gegensinnigen Kongruenzen in einer Rosettengruppe, welche \mathcal{I}_p als Untergruppe aller gleichsinnigen Kongruenzen enthält, sind Spiegelungen an p Geraden durch O , welche die \mathbb{R}^2 in $2p$ kongruenten Sektoren zerlegen (Bezeichnung \mathcal{D}_p). Bei den meisten Blumen oder in den Abbildungen 1,2 findet man Beispiele für Rosetten. Welcher Kollege kennt eine Blume mit der Symmetriegruppe \mathcal{D}_2 ? Allgemeine Rechtecke und Ellipsen sind zugehörige Rosetten.

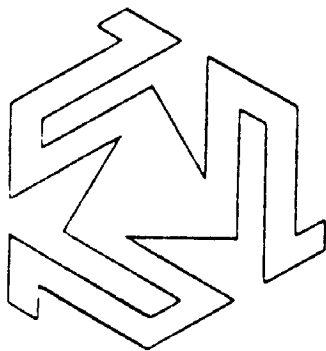


Abb.1 : \mathcal{I}_3



Abb.2 : \mathcal{D}_6

Einige Beispiele von Blüten mit zugehörigen Symmetriegruppen:

\mathcal{D}_1 : Lippenblütler; \mathcal{D}_3 : gemeiner Froschlöffel; \mathcal{D}_4 : Seidelbast
Waldmeister, Schöllkraut, \mathcal{D}_5 : Vergißmeinnicht, Erdbeere,
Glockenblumen, Birne, Apfel; \mathcal{D}_6 : Bärenlauch, Herbstzeitlose.

Von besonderer Wichtigkeit sind die inneren Automorphismen einer Ornamentgruppe \mathcal{Q} . Bei einem solchen wird jede Kongruenz $X \in \mathcal{Q}$ auf die Kongruenz $A^{-1}XA \in \mathcal{Q}$ abgebildet, wobei $A \in \mathcal{Q}$ eine beliebige (fest herausgegriffene) Kongruenz von \mathcal{Q} bedeutet. Das nebenstehende Diagramm in Abb.3 zeigt:

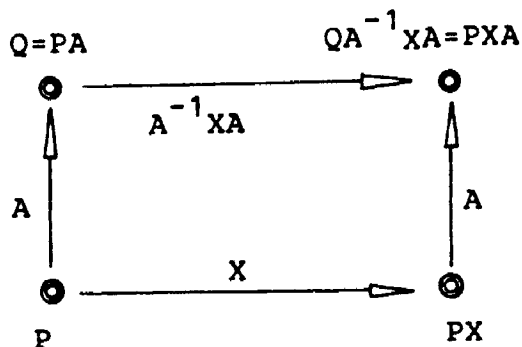


Abb.3

Wendet man auf einen Urpunkt P und den Bildpunkt PX (bei der Abbildung X) gleichzeitig die Abbildung A an, so erhält man einen Urpunkt $Q = PA$ und den zugehörigen Bildpunkt $QA^{-1}XA = PXA$ bei der Kongruenz $A^{-1}XA$. Hieraus folgt beispielsweise sofort das wichtige Prinzip der Invarianz der Drehzentren:

Jede Abbildung einer Ornamentgruppe \mathcal{Q} führt die Menge der zugehörigen Drehmittelpunkte (zusammen mit ihren Zähligkeiten) in sich über. Denn übt man auf Ur- und Bildmenge einer p -zähligen Drehung $X \in \mathcal{Q}$ gleichzeitig die Kongruenz A aus, so erhält man Ur- und Bildmenge einer p -zähligen Drehung $A^{-1}XA \in \mathcal{Q}$. Das neue Drehzentrum ist das Bild des alten unter A , die neue Drehung hat die gleiche oder entgegengesetzte Orientierung wie X , je nachdem ob A eine gleich- bzw. gegensinnige Kongruenz ist.

Werden die Rosettengruppen als die translationsfreien Ornamentgruppen definiert, so läßt sich zeigen, daß eine solche nicht Drehungen um verschiedene Drehzentren enthalten kann. Indirekt: Seien S_1, S_2 zwei Drehungen einer Rosettengruppe um O_1 bzw. $O_2 \neq O_1$ durch die Winkel $0 < \alpha_1 < 2\pi$ bzw. $0 < \alpha_2 < 2\pi$. Dann gilt: $O_1 S_1^{-1} S_2^{-1} S_1 S_2 = O_1 S_2^{-1} S_1 S_2$, da S_1^{-1} das Zentrum O_1 fest läßt. Nun ist aber $S_2^{-1} S_1 S_2$ das Bild von

S_1 vermöge des durch S_2 erzeugten inneren Automorphismus der Rosettengruppe, also die Drehung um $O_1 S_2$ durch α_1 . Es gilt $O_1 S_2 \neq O_1$, da $S_2 \neq I$ und $O_1 \neq O_2$, also ist $O_1 S_2^{-1} S_1 S_2 \neq O_1$, da O_1 um den von O_1 verschiedenen Punkt $O_1 S_2$ durch α_1 gedreht wird. Die bisherigen Überlegungen dienten nur dazu, festzustellen, daß $O_1 S_1^{-1} S_2^{-1} S_1 S_2 = O_1 S_2^{-1} S_1 S_2 \neq O_1$, also $S_1^{-1} S_2^{-1} S_1 S_2 \neq I$ (Identität). Andererseits ist der Gesamtdrehwinkel der gleichsinnigen Kongruenz $S_1^{-1} S_2^{-1} S_1 S_2$ nach dem Additionstheorem für Drehwinkel gleich der Summe der auftretenden Teildrehwinkel, also $-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0$. Damit erweist sich $S_1^{-1} S_2^{-1} S_1 S_2$ als Translation im Widerspruch zur Voraussetzung. Eine Ornamentgruppe, welche Translationen enthält, heißt eine Fries- bzw. Wandmuster- oder Wandornamentgruppe, je nachdem ob alle vorkommenden Translationen parallel sind oder nicht. Dabei ist die aus allen Translationen bestehende Untergruppe ein- bzw. zweidimensional, das heißt sie wird von einer einzigen (kürzesten) Translation und ihrer inversen bzw. von zwei linear unabhängigen Translationen und ihren inversen (durch iterative Zusammensetzung) erzeugt. Die Anwendung der Translationsuntergruppe auf einen einzelnen Punkt liefert im ersten Fall ein eindimensionales, im zweiten Fall ein zweidimensionales Punktgitter.

Die in einer Friesgruppe allenfalls vorkommenden Drehungen sind höchstens zweizählig. Beweis: Sei S eine Drehung durch $\alpha \neq 0$ und T eine durch den Vektor \vec{t} gegebene Translation einer Friesgruppe. Dann ist $S^{-1} T S$ eine Translation der Friesgruppe, welche durch den Vektor $\vec{t} S$ (Bild von \vec{t} unter S) gegeben ist und wegen $\vec{t} \parallel \vec{t} S$ ist $\alpha = \pi$.

Besitzt ein Fries ein Digyr und unterwirft man diesen allen Translationen der zugehörigen Symmetriegruppe, so erhält man unendlich viele kollineare und äquidistant verteilte Digyre. Die noch fehlenden Digyre sind Mittelpunkte zweier solchen Digyre. Weiters kann eine Friesgruppe noch Spiegelungen oder Gleitspiegelungen enthalten. Es gibt sieben Friesgruppen und davon genau zwei, welche nur aus gleichsinnigen Kongruenzen aufgebaut sind. Die folgende Bezeichnung wurde von L. FEJES TÓTH übernommen. Dabei bedeutet \mathcal{F}_p eine Gruppe mit nur

gleichsinnigen Kongruenzen und höchstens p -zähligen tatsächlich existierenden Drehungen. Jede Gruppe φ_p^1 enthält auch gegensinnige Kongruenzen und φ_p als Untergruppe aller gleichsinnigen Kongruenzen. Jede Friesgruppe mit dem unteren Index 1 enthält also an gleichsinnigen Kongruenzen nur (parallele) Translationen. Diese Bezeichnung kann bei Wandmustergruppen glücklicherweise beibehalten werden, weil in der R^2 jede Wandmustergruppe aus nur gleichsinnigen Kongruenzen durch den unteren Index eindeutig bestimmt ist. Dies trifft etwa im R^3 schon nicht mehr zu. Der Schlüssel zur Ermittlung von Friesgruppen in Abb.4 muß von oben nach unten gelesen werden. Man beachte, daß sich φ_1 (Hüpfspur, Abb.5) und φ_1^3 (Gehspur, Abb.11) in den Kongruenzen wesentlich unterscheiden und daher verschiedene Ornamentgruppen darstellen, jedoch als unendliche zyklische Gruppen isomorph sind. Vom algebraischen Standpunkt aus ist also Hüpfen und Gehen dasselbe.

Wenn eine Punktmenge eine diskrete, eindimensionale Translationsgruppe trägt, liegt sicher (zumindest) eine Friesgruppe vor.

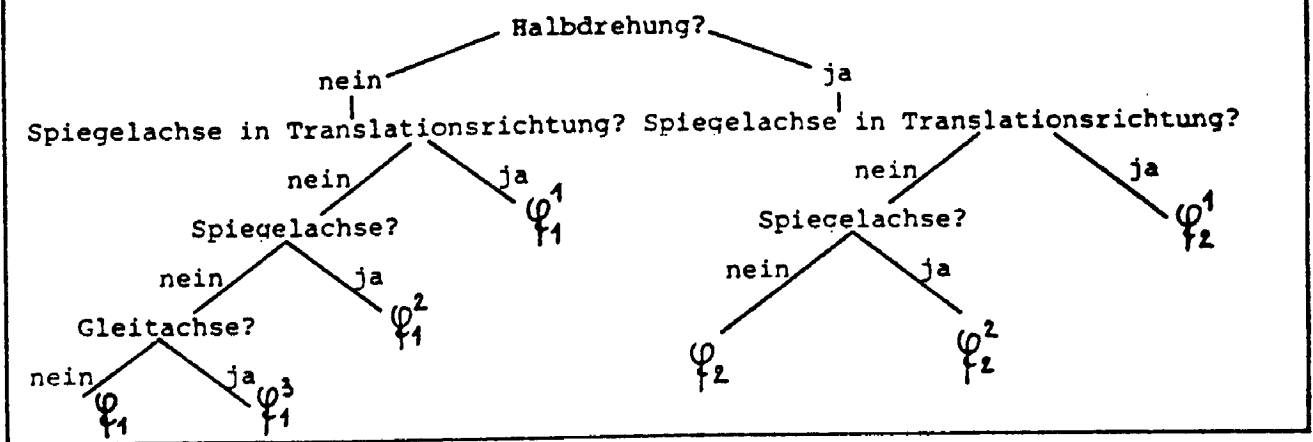


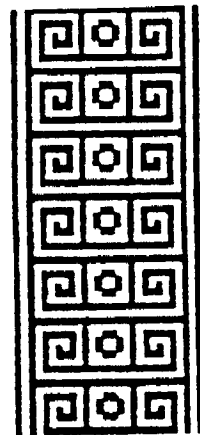
Abb. 4



φ_1



φ_2



φ_1^1



φ_2^1



φ_1^2



φ_2^2



φ_1^3

Abb. 5

Abb. 6

Abb. 7

Abb. 8

Abb. 9

Abb. 10

Abb. 11

Zwei Ornamentgruppen sind natürlich als verschieden anzusehen, wenn sie nicht isomorph sind. Der Geometer unterscheidet aber noch feiner: Die Verschiedenheit ist auch dann gegeben, wenn sich zwei Gruppen in den Kongruenzen wesentlich unterscheiden oder ein Unterschied bei den auftretenden Inzidenzen von Symmetrieelementen (Drehpunkte, Spiegelachsen und Gleitachsen) festzustellen ist. Beispielsweise sind φ_2^1 (Abb.8) und φ_2^2 (Abb.10) schon deswegen als verschieden anzusehen, weil im Falle φ_2^1 jeder Digyr (zweizähliges Drehzentrum) Schnittpunkt von zwei Spiegelachsen ist und im Falle φ_2^2 kein Digyr auf einer Spiegelachse liegt.

Die Ornamentgruppen, welche (mindestens) zwei nicht parallele Translationen enthalten, heißen Wandmuster - oder Wandornamentgruppen. Diskrete Kongruenzgruppen des R^n , für die beschränkte Fundamentalbereiche existieren, heißen kristallographische Gruppen. Die Wandmustergruppen sind genau die kristallographischen Gruppen der R^2 .

Die erste mathematische Behandlung und vollständige Aufzählung aller 17 zweidimensionalen kristallographischen Gruppen gab E.S.FEDOROW 1891. Eine Wiederentdeckung erfolgte durch R.FRICKE und F.KLEIN 1897, G.PÓLYA und P.NIGGLI 1924. 16 von den 17 Gruppen hat bereits C.JORDAN 1869 beschrieben. Die fehlende wurde 1874 durch L.SOHNCKE entdeckt, doch er übersah drei andere [1]. Viele der Gruppen wurden bereits im 13. Jahrhundert von den Mauren zur Ausschmückung ihrer Alhambra verwendet.

W.BARLOW hat im Jahre 1901 den wichtigen Satz über die kristallographische Beschränkung, welcher besagt, daß die Fries- und Wandmustergruppen keine 5-zähligen und mehr als 6-zähligen Drehungen enthalten können, wie folgt bewiesen:

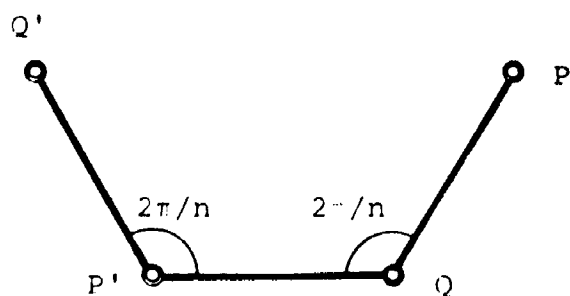


Abb. 12

Sei P ein n-Gyr (n-zähliges Drehzentrum). Jedes Element der Gruppe führt P in einen n-Gyr über. Sei Q ein solcher, der möglichst nahe

bei P liegt (Q muß existieren, da die Gruppe diskret ist). Wir wenden nun auf P die Drehung $Q(2\pi/n)$ um Q durch $\frac{2\pi}{n}$ an und erhalten den n-Gyr P' . Drehung von Q um P' durch $\frac{2\pi}{n}$ liefert den n-Gyr Q' : $P'=P.Q(2\pi/n)$, $Q'=Q.P'(2\pi/n)$ (Abb.12). Es gilt $\overline{PQ}=\overline{P'Q}=\overline{P'Q'}$. $P=Q'$ ist gleichbedeutend mit $n=6$. Für $n \neq 6$ muß also nach Voraussetzung $\overline{PQ'} \geq \overline{PQ}$ sein und hieraus folgt bereits $n \leq 4$. Denn für $n=5$ wäre $\overline{PQ'} < \overline{PQ}$ (Abb.12) und für $n > 6$ wäre bereits $\overline{PP'} < \overline{PQ}$.

Eine (unendliche) Menge kongruenter Figuren $F \subset \mathbb{R}^2$ ist ein Wandornament, wenn sie zwei linear unabhängige Translationen T_1, T_2 verträgt (d.h. bei Anwendung von T_1, T_2 als Ganzes in sich übergeht), denn dann verträgt sie die von T_1, T_2 erzeugte (zweidimensionale) Translationsgruppe \mathcal{T}_1 , welche Untergruppe jeder Wandornamentgruppe ist. Zur Ermittlung der genauen Wandornamentgruppe (d.h. der Symmetriegruppe) dient der Schlüssel in Abb.13. In der ersten Zeile der Tabelle ist angegeben, welche maximalzähligen n-Gyre in den jeweils darunter stehenden Ornamenten tatsächlich auftreten. Jede der siebzehn möglichen Wandornamentgruppen, von denen genau fünf nur aus gleichsinnigen Kongruenzen bestehen, paßt in genau ein Kästchen der Tabelle. In den Abbildungen 14-30 ist jeweils links unten die Gruppe und fallweise rechts unten Herkunft (A=Alhambra, E=Escher) bzw. Pflasterungstyp des Ornaments nach [2] angegeben. Von der Färbung der Fundamentalfiguren ist abzusehen. Der Leser überzeuge sich an Hand des Schlüssels in Abb.13 von der Richtigkeit der Gruppenbezeichnungen. Beispielsweise gibt es in Abb.21 keine n-Gyre, also trifft die erste Spalte der Tabelle zu und weil keine Spiegelachsen, wohl aber Gleitachsen auftreten, handelt es sich um die Gruppe \mathcal{M}_1^3 . Das Motiv stammt von ESCHER und es handelt sich um den Pflasterungstyp 1 nach HEESCH-KIENZLE. Abb.22 gehört zur zweiten Spalte der Tabelle. Hier gibt es Digyre, die nicht auf Spiegelachsen liegen (Seitenmitten der Rhomben) und solche, die auf Spiegelachsen liegen (Ecken und Flächenmitten der Rhomben), also liegt laut Tabelle \mathcal{M}_2^1 vor.

Wenn eine Punktmenge eine diskrete, zweidimensionale Translationsgruppe ver-
trägt, liegt sicher eine Wandornamentgruppe vor.

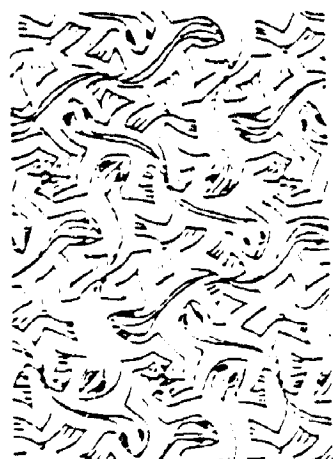
Keine n-Gyre	Nur Digyre	Nur Trigyre	Tetragyre	Hexagyre
Keine gegensin- nigen Kongruen- zen m_1	Keine gegensin- nigen Kongruen- zen m_2	Keine Spiegelachsen m_3	Keine Spiegelachsen m_4	Keine Spiegelachsen m_6
Manche Gleit- achsen sind keine Spie- gelachsen m_1^1	Manche Digyre nicht auf Spiegelachsen m_2^1	Alle Trigyre auf Spiegelachsen m_3^1	Es gibt Tetragyre auf Spiegelachsen m_4^1	Spiegelachsen m_6^1
Alle Gleit- achsen sind Spiegelachsen m_1^2	Alle Digyre auf Spiegelachsen m_2^2	Manche Tri- gyre nicht auf Spiegelachsen m_3^2	Es gibt Spie- gelachsen ohne Tetragyre m_4^2	
Keine Spiegel- achsen aber Gleitachsen m_1^3	Alle Spiegel- achsen par- allel m_2^3			
	Keine Spiegel- achsen aber Gleitachsen m_2^4			

"Manche" bedeutet eine echte Teilmenge, die angeführten Symmetrieelemente
existieren tatsächlich.

Abb. 13

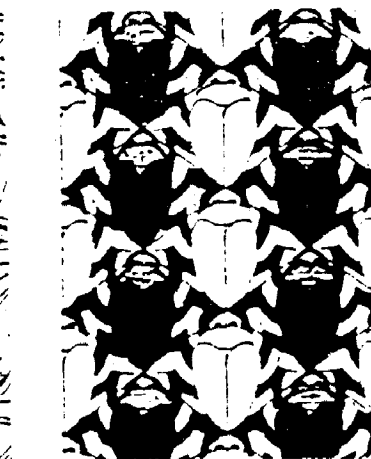


m_4 Abb. 14 E1



m_6 Abb. 18 E12

m_2 Abb. 15 E4



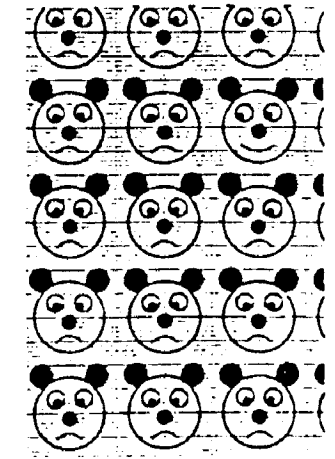
m_1^1 Abb. 19 E1

m_3 Abb. 16 E9

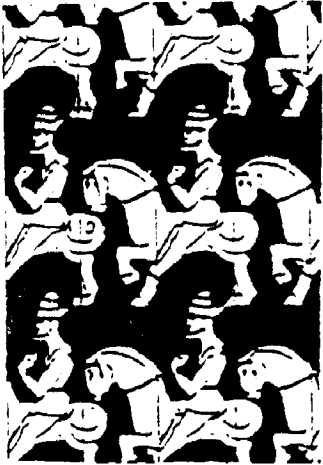


A1

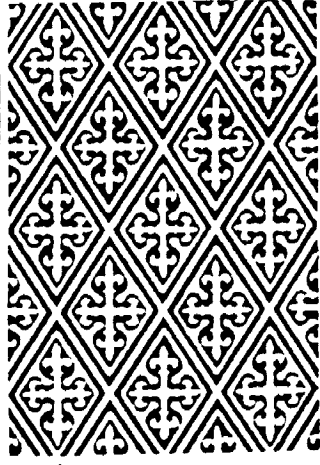
m_4 Abb. 17 E15



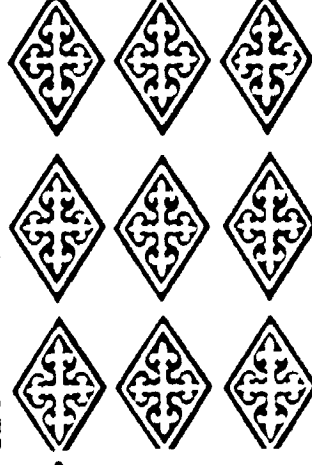
m_1^2 Abb. 20



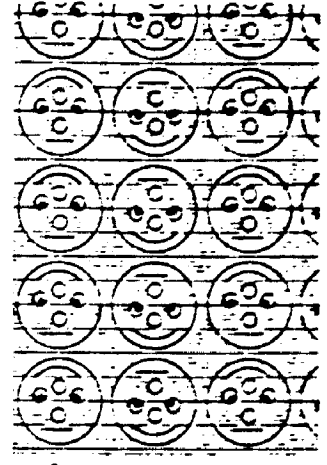
m_4^3 Abb. 21 E17



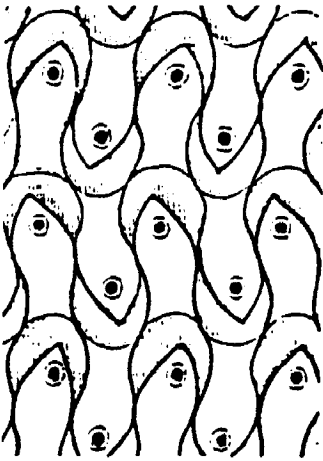
m_2^1 Abb. 22



m_2^2 Abb. 23



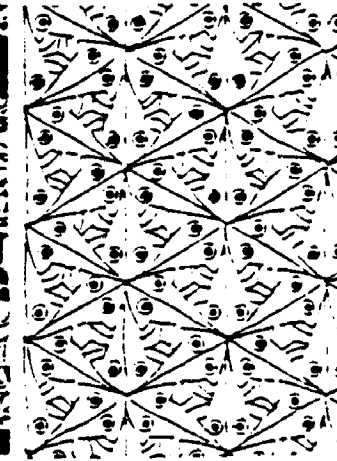
m_2^3 Abb. 24



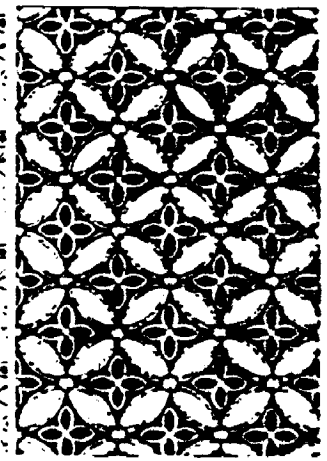
m_2^4 Abb. 25 26



m_3^1 Abb. 26 E



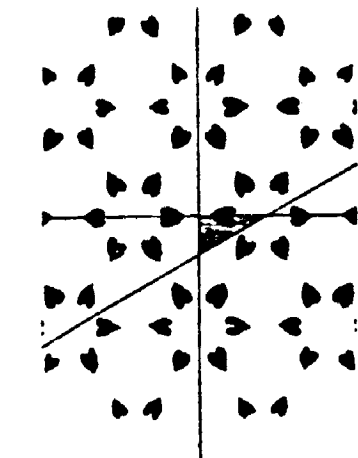
m_8^2 Abb. 27 E3



m_4^1 Abb. 28



m_4^2 Abb. 29 E15



m_6^1

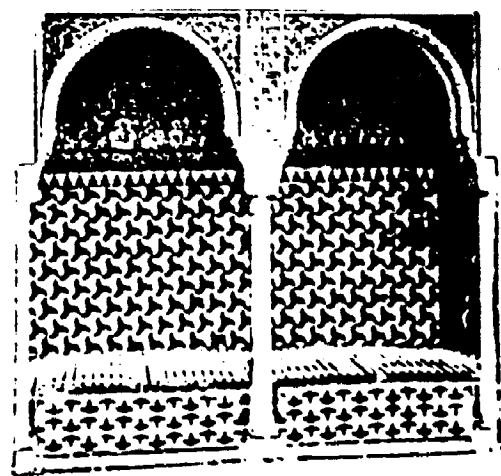


Abb. 30 oben: m_3 , A3 ; unten: m_4^2 , A15

Der Rand eines Pflastersteintyps nach HEESCH-KIENZLE (HK-Typ) muß eine geschlossene JORDAN-Kurve (topologisches Bild eines Kreises) sein und darf sonst in gewissem Sinne zur Hälfte willkürlich gewählt werden. Die folgenden Beispiele stammen durchwegs von M.C.ESCHER, welcher die HK-Typen sicherlich nicht gekannt hat und seine Pflastersteine intuitiv gefunden hat.

Der HK-Typ 1 ergibt sich, wenn man bei einem beliebigen Parallelogramm parallele Seiten jeweils durch translationskongruente (schiebungsgleiche) Linien ersetzt (Abb.14 und Abb.31). Den HK-Typ 4 erhält man, wenn man bei einem (be-

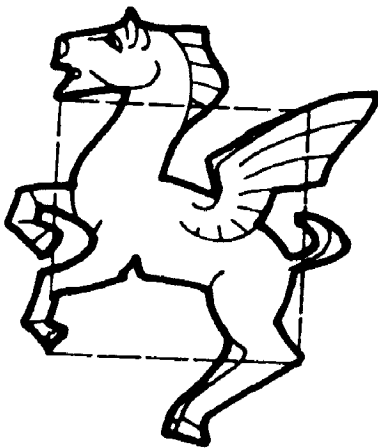


Abb.31

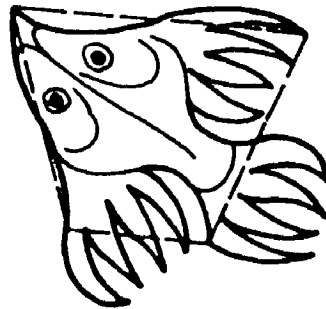


Abb.32

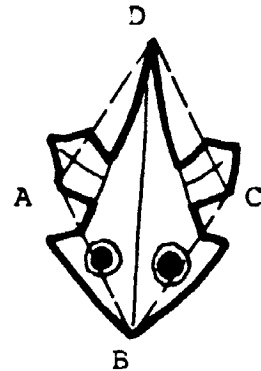


Abb.33

liebigen) Viereck jede Seite durch eine C-Linie (zentrisch symmetrische Kurve) ersetzt (Abb.15 und Abb.32).

Wird eine nicht geschlossene JORDAN-Kurve (topologisches Bild eines beschränkten, abgeschlossenen Intervalls) um einen ihrer beiden Endpunkte durch den Winkel $\pm 360^\circ/i$ ($i=3,4,6$) verdreht, so wollen wir nach [2] von einem C_i -Paar sprechen, wenn dieses Kurvenpaar keinen Selbstschnitt aufweist. Werden nun bei einem Rhombus ABCD mit den Innenwinkeln $\alpha=\gamma=120^\circ$, $\beta=\delta=60^\circ$ die Seitenpaare DA,AB bzw. BC,CD durch je ein C_3 -Paar

ersetzt, entsteht der HK-Typ 8 (Abb.27 und Abb.33).

Mit dem nächsten Pflasterstein hängen die beiden folgenden schönen Sätze der Dreiecksgeometrie zusammen: Errichtet man über den Seiten eines beliebigen Dreiecks $X_1 X_2 X_3$ nach außen (oder innen) gleichschenkelige Dreiecke mit demselben Basiswinkel φ , so bilden die drei neuen Ecken A, B, C, ein sogenanntes KIEPERT-Dreieck, welches zum gegebenen Dreieck perspektiv ist. Die zu $\varphi = 30^\circ$ gehörigen KIEPERT-Dreiecke sind gleichseitig und werden äußeres bzw. inneres NAPOLEON-Dreieck genannt. Sind A, B, C die Ecken eines zum Dreieck $X_1 X_2 X_3$ gehörigen NAPOLEON-Dreiecks (Abb.34) und ersetzt man die drei Streckenpaare X_1C, CX_2 ; X_2A, AX_3 ; X_3B, BX_1 durch je ein C_3 -Paar, so erhält man den HK-Typ 9 (Abb. 16 und Abb.35).

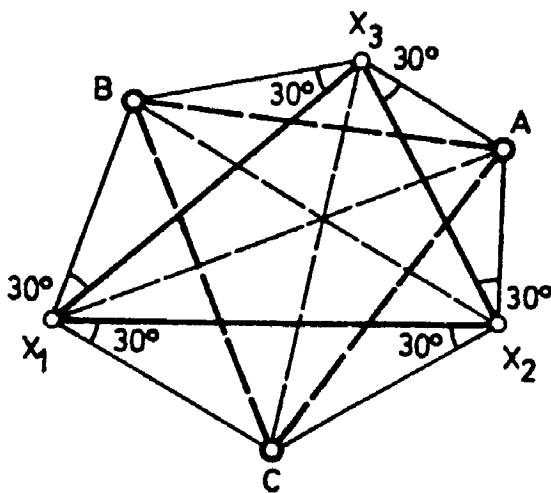


Abb.34

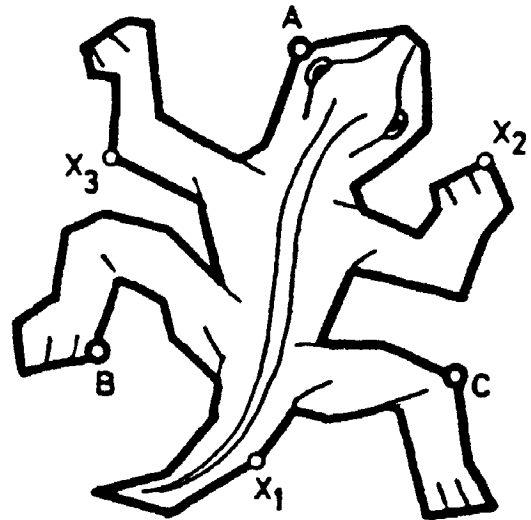


Abb.35

Aus einem Deltoid ABCD mit $AB=AD$, $BC=CD$ und den Innenwinkeln $\alpha=120^\circ$, $\gamma=60^\circ$ entsteht der HK-Typ 12, wenn AB,AD durch ein C_3 -Paar und BC,CD durch ein C_6 -Paar ersetzt werden (Abb.18 und Abb.36). Den HK-Typ 15 erhält man, wenn bei einem Quadrat zwei Nachbarseitenpaare durch je ein C_4 -Paar ersetzt werden (Abb.17, Abb.37, Abb.29, Abb.38).

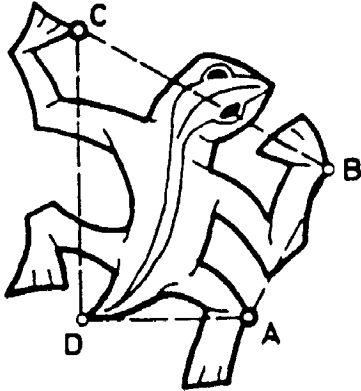


Abb. 36

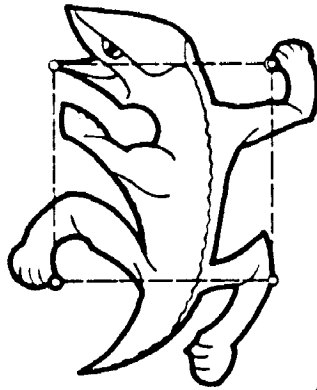


Abb. 37

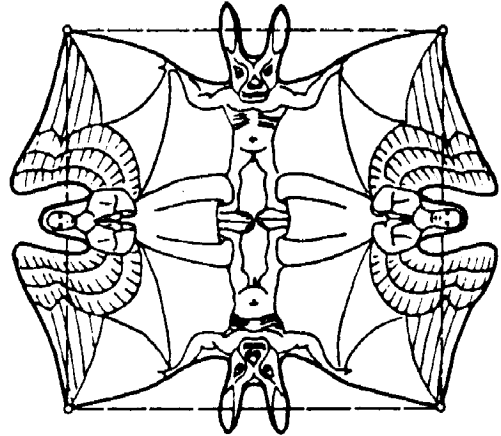


Abb. 38

Der berühmte ägyptische Reiter von M.C.ESCHER (Abb.21) ist ein HK-Typ 17 und entsteht auf folgende Weise: man ersetze bei einem beliebigen Deltoid ABCD mit $AB=BC$, $CD=DA$ die Seite AB (bzw. DA) durch eine beliebige Linie und die Seite BC (bzw. CD) durch deren Bild unter jener Gleitspiegelung, welche A auf B und B auf C (bzw. A auf D und D auf C) abbildet (Abb.39).

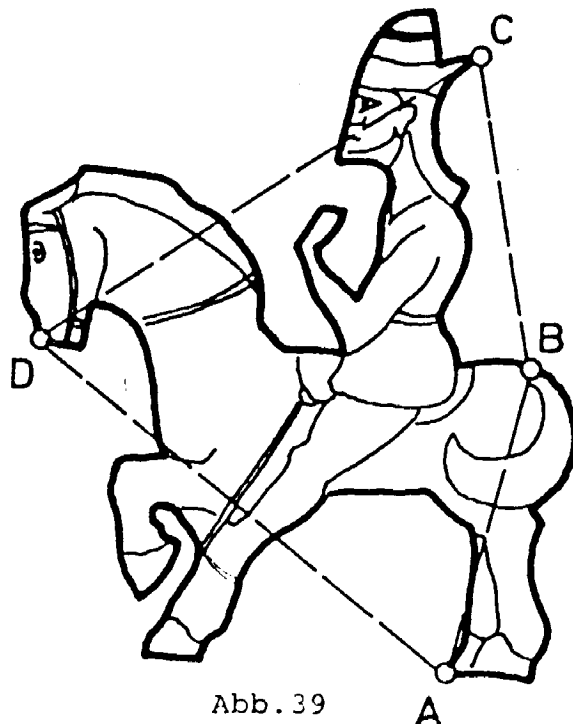


Abb. 39

Die Erzeugenden sind durch einfache Symbole dargestellt, wobei Pfeile, durch n (regelmäßig verteilte) Radien unterteilte Kreise, Strecken und Halbpfeile der Reihe nach Translationen, n -Gyre, Spiegelachsen und Gleitachsen bedeuten. Beispielsweise wird m_3^1 durch zwei Drittelrotationen und durch eine Spiegelung an der Verbindungsgeraden der Drehpunkte oder durch Spiegelungen an den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks erzeugt. m_6^1 etwa kann durch Spiegelungen an den Seiten eines halben gleichseitigen Dreiecks erzeugt werden. Auf diese Weise entstand das Ornament in Abb.30 links aus einem halben Herz.

φ_1			m_2^1		
φ_1^1			m_2^2		
φ_1^2			m_2^3		
φ_1^3			m_2^4		
φ_2			m_3		
φ_2^1			m_3^1		
φ_2^2			m_3^2		
m_4			m_4		
m_4^1			m_4^1		
m_4^2			m_4^2		
m_4^3			m_6		
m_2			m_6^1		

Abb. 40

In Abb.40 findet man Erzeugungsmöglichkeiten für die einzelnen Ornamentgruppen [1]. Durch wiederholte Anwendung der angegebenen Kongruenzen und deren inverser Abbildungen auf eine Fundamentalfigur und deren Bilder entsteht also jeweils ein zugehöriges Ornament. Genau die Gruppen \mathcal{D}_p , \mathcal{F}_1^2 , \mathcal{F}_2^1 , \mathcal{M}_2^2 , \mathcal{M}_3^1 , \mathcal{M}_4^1 und \mathcal{M}_6^1 (symmetriereichste aller Ornamentgruppen) sind allein durch Spiegelungen erzeugbar. Zugehörige Ornamente ließen sich (bereits im Vorschulalter) durch Falten der Zeichenebene herstellen. Bei der Herstellung eines Ornaments ergibt sich von selbst die jeweilige Anordnung der allfälligen Drehpunkte, Spiegel- und Gleitachsen (Symmetrieelemente). Eine Übersicht darüber findet man in [2].

Literatur:

- [1] L.FEJES TÓTH: Reguläre Figuren. (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965).
- [2] H.HEESCH, O.KIENZLE: Flächenschluß. (Springer, Berlin, 1963).